ОЦЕНКА VaR ВАЛЮТНОГО ПОРТФЕЛЯ
НА ОСНОВЕ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЕГО КОМПОНЕНТ

И.В. Загуменнова
Научный руководитель: доцент, к. ф.-м. н. М.Л. Шинкеев
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: zagumennovaiv@mail.ru

EVALUATION OF VaR MONETARY PORTFOLIO
BASED ON THE FACTOR MODEL OF ITS COMPONENT

I.V.Zagumennova
Scientific Supervisor: Assoc. prof., Ph.D M.L. Shinkeev
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: zagumennovaiv@mail.ru

Abstract. *On the basis of the factor model, the distribution of density and function of the portfolio return are found. One-day VaR portfolio is defined. VaR estimates for a 10-day time horizon are made.*

Введение. В ходе факторного анализа распределения совокупности валютных пар в статье [1] показано, что совокупность относительных приращений котировок валютных пар может быть представлена в виде двухфакторной модели, распределение компонент которой достаточно хорошо описывается распределением Лапласа [2] . На основе этой модели можно получить аналитическое представление как для плотностей распределений относительных приращений всех котировок, входящих в совокупность, так и оценить распределения величин, являющихся производными от исходных компонент. В данной работе на основе модели, описанной в статье [1], рассматривается оценка VaR портфеля, состоящего из валютных пар.

Материалы и методы исследования. Пусть $r=\sum_{j=1}^{m} w_j r_j$ - доходность портфеля за период времени t, состоящего из m активов (валютных пар) с доходностями r_j и долями w_j, причем для компонент портфеля справедлива следующая факторная модель:

$$r_j-\bar{r}_j=\alpha_{1j}\xi_1+\alpha_{2j}\xi_2+\varepsilon_j,\quad j=\overline{1,m}, \qquad (1)$$

где: $\bar{r}_j$, $j=\overline{1,m}$ - средние значения доходностей валютных пар;

ξ_1,ξ_2 - обобщенные факторы, $M(\xi_1)=M(\xi_2)=0$, $D(\xi_1)=D(\xi_2)=1$;

α_1,α_2 - векторы факторных нагрузок, $\operatorname{cov}(r_i,r_j)=\sum_{s=1}^{2}\alpha_{si}\alpha_{sj}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$, $i\neq j$;

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m$ - характерные факторы, $M(\varepsilon_i)=0$, $D(\varepsilon_i)=D(r_i)-\sum_{s=1}^{2}\left(\alpha_{si}\right)^2$, $i=\overline{1,m}$.

Предполагается также, что обобщенные и характерные факторы независимы в совокупности. Тогда для доходности r портфеля будет справедливо:

$$
\begin{aligned}
r &= \sum_{j=1}^{m} w_j r_j = \sum_{j=1}^{m} w_j \bar{r}_j + \sum_{j=1}^{m} w_j (\alpha_{1j}\xi_1 + \alpha_{2j}\xi_2 + \varepsilon_j) = \\
&= \bar{r} + \sum_{j=1}^{m} w_j (\alpha_{1j}\xi_1 + \alpha_{2j}\xi_2 + \varepsilon_j)
\end{aligned}, \qquad (2)
$$

где: $\bar{r}$ - средняя доходность портфеля.

Соответственно для величины $\eta = r - \bar{r} = \sum_{j=1}^{m} w_j (\alpha_{1j}\zeta_1 + \alpha_{2j}\zeta_2 + \varepsilon_j)$ можем записать:

$$
\eta = r - \bar{r} = \sum_{j=1}^{m} w_j (\alpha_{1j}\xi_1 + \alpha_{2j}\xi_2 + \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \xi_i + \sum_{j=1}^{m} w_j \varepsilon_j ,
$$

где: $\gamma_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_{j_i} \; i = \overline{1,2}$.

Пусть как обобщенные, так и характерные факторы независимы и имеют распределение Лапласа с параметрами a_1, a_2 и $\theta_1 \div \theta_m$ соответственно. Характеристическая функция распределения Лапласа с параметром a имеет вид: $g(t) = \dfrac{a^2}{a^2 + t^2}$. Используя свойства характеристической функции [3], получим следующую характеристическую функцию величины η:

$$
g_\eta(t) = \prod_{i=1}^{2} \frac{a_i^2}{a_i^2 + \gamma_i^2 t^2} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{\theta_j^2}{\theta_j^2 + w_j^2 t^2} = \prod_{j=1}^{m+2} \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 + t^2}, \qquad (3)
$$

где: $\delta_j = a_j / \gamma_j$ для $j = \overline{1,2}$; $\delta_j = \theta_j / w_j$ для $j = \overline{3, m+2}$.

Выполнив обратное преобразование Фурье [4] найдем плотность распределения величины η:

$$
f_\eta(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+2} \left[\delta_j \prod_{i=1, i \neq j}^{m+2} \left[\frac{\delta_i^2}{\delta_i^2 - \delta_j^2} \right] e^{-\delta_j |x|} \right]. \qquad (4)
$$

Соответственно искомые плотность и функция распределения доходности портфеля будут иметь вид:

$$
f_r(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+2} \left[\delta_j \prod_{i=1, i \neq j}^{m+2} \left[\frac{\delta_i^2}{\delta_i^2 - \delta_j^2} \right] e^{-\delta_j |x - \bar{r}|} \right], \qquad F_r(x) = \int_{-\infty}^{x} f_r(z) dz . \qquad (5)
$$

Для заданного уровня значимости α, найдем значение τ, для которого $F_r(\tau) = \alpha$. С вероятностью $\beta = 1 - \alpha$ доходность портфеля на временном горизонте t не опустится ниже величины

τ. Соответственно, VaR портфеля на временном горизонте t будет равен: $VaR_t = P(1+\tau)$, где P - начальная стоимость портфеля. Для того, чтобы получить VaR портфеля на временном горизонте $T = k \cdot t, \quad k \in \mathrm{N}$, можно воспользоваться, например, методом Монте-Карло.

Результаты. В качестве примера был рассмотрен портфель из 5 валютных пар (BYR/RUB; CNY/RUB; EUR/RUB; GBP/RUB; USD/RUB) взятых с равными долями, построенный на основе данных за период с 12 января 2015 года по 13 октября 2015 года.

Параметры факторной модели приведены в таб. 1, 2. Уровень значимости модели p=0,314.

Таблица 1

Координаты векторов факторных нагрузок

α_1	-0,0118	-0,0125	-0,0158	-0,0102	-0,0127
α_2	-0,0155	-0,0040	0,0024	-0,0013	0,0018

Таблица 2

Оценки параметра а распределения Лапласа и уровень значимости p критерия хи-квадрат проверки гипотезы о распределении по закону Лапласа для обобщенных и характерных факторов

Фактор	ξ_1	ξ_2	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
Оценка параметра a	1,30	1,39	580	134	478	89	156
Уровень значимости p	0,99	0,13	0,78	0,09	0,37	0,36	0,28

Вывод. На основе данной факторной модели по формулам (5) была найдены плотность и функция распределения доходности портфеля, а также определены однодневные VaR портфеля, соответствующие вероятностям 0,95 и 0,99. Моделируя доходности портфеля с законом (5) были получены и соответствующие оценки VaR для 10 дневного временного горизонта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zagumennova I.V. Investigation of the distribution of currency pairs using methods of factor analysis // XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых.. — Томск, 2016. — Т. — С. 54-56.
2. Лукасевич И. Я. Финансовый менеджмент. –М.:Бизнес-портал "Бизнес-Учебники.РФ", 2014 – 2015 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://bizbook.online/finance.html.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - 6-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 1999.
4. Крицкий О.Л. Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов: учебное пособие // Национальный исследовательский Томский политехнический университет — Томск, 2014 г.